الموضوع الثالث

التمرين الأوّل:

I/ D و H نقطتان من الفضاء و I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$.

1) بيّن أنّه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH} = MI^2 - ID^2$.

2) استنتج أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH} = 0$ هي سطح كرة (S) يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.

II/ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC).

3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)؛ احسب احداثيات النقطة H.

4) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، ثمّ اكتب معادلة لسطح الكرة (S) المذكورة في الجزء **I**.

5) نعتبر النقطة $N\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5};0\right)$.

أ) أثبت أنّ N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2- لتكن النقط K ، L ، M لواحقها $z_K = 1+i$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_M = -i\sqrt{3}$

في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

- علّم هذه النقط .

3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L، عيّن z_N لاحقة N.

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

- عيّن z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالدوران r.

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B.

- عيّن z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.

- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t.

5- أ) بيّن أنّ: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABCD$.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathfrak{R}$ كما يلي: $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ(C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ عيّن a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathfrak{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

1. بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$

2. احسب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$.

ـ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

6. بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1{,}7<\alpha<-1{,}6$.

7. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

III ـ نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathfrak{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

ـ عيّن اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ شكل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع:

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathfrak{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .

2. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

3. احسب $f(-x)+f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0{,}71;-0{,}70[$.

5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس (T).

6. أُرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيّرات h ، أُرسم (C_h)، علل ذلك.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الثالث

التمرين الأوّل:

الجزء I/.

1) إثبات أنّه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$.

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)$ وبما أنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$ فإنّ $\overrightarrow{IH}=-\overrightarrow{ID}$

ومنه $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{ID}\right)=MI^2-ID^2$.

2) استنتاج أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ هي سطح كرة (S)

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ تكافئ $MI^2-ID^2=0$ و تكافئ $MI=ID$ بالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزه I ونصف قطره ID.

الجزء II/.

1) أ) التحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$ و $\frac{0}{6}\neq\frac{-3}{-3}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4(-3)+2(6)+3(0)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4(-3)+2(0)+3(4)=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $4x+2y+3z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (ABC) فإنّ

$4(3)+d=0$ ومنه $d=-12$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $4x+2y+3z-12=0$.

2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x+5=4t\\ y=2t\\ z-1=3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-5+4t\\ y=2t\\ z=1+3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

حساب احداثيات النقطة H.

H هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC).

نحل الجملة

$$\begin{cases}x=-5+4t\text{..........................}(1)\\ y=2t\text{...............................}(2)\\ z=1+3t\text{............................}(3)\\ 4x+2y+3z-12=0\text{..........}(4)\end{cases}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد: $4(-5+4t)+2(2t)+3(1+3t)-12=0$

ومنه $29t-29=0$ أي $t=1$ إذن $\begin{cases} x=-5+4(1) \\ y=2(1) \\ z=1+3(1) \end{cases}$ وعليه $H(-1;2;4)$

4) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

يمكن حساب المسافة بطريقتين

طريقة 1: $d(D;(ABC))=\dfrac{|4(-5)+2(0)+3(1)-12|}{\sqrt{29}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

طريقة 2: $d(D;(ABC))=DH$

لدينا $\overrightarrow{DH}(4;2;3)$ وعليه $DH=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$ إذن $d(D;(ABC))=\sqrt{29}$.

كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تعيين احداثيات I.

$x_I=\dfrac{x_D+x_H}{2}=-3$ ، $y_I=\dfrac{y_D+y_H}{2}=1$ ، $z_I=\dfrac{z_D+z_H}{2}=\dfrac{5}{2}$ إذن $I\left(-3;1;\dfrac{5}{2}\right)$

$ID=\dfrac{DH}{2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

$MI=ID$ معناه $(x+3)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{29}{4}$ وهي معادلة السطح (S).

5) نعتبر النقطة $N\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$.

أ) إثبات أنّ N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

تكون N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) إذا تحقق ما يلي: $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$ و $N\in(AB)$

لدينا $\overrightarrow{CN}\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};4\right)$ ومنه $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{12}{5}(-3)+\dfrac{6}{5}(6)+0(0)=0$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AN}\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AN}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}$ مرتبطان خطيا ومنه N تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$V=\dfrac{1}{3}S\times DH$ حيث S هي مساحة المثلث ABC.

لدينا $AB=\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$ ، $CN=\sqrt{\dfrac{144}{25}+\dfrac{36}{25}+16}=\sqrt{\dfrac{580}{25}}=\sqrt{\dfrac{116}{5}}=\dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$

ومنه $S=\dfrac{1}{2}AB\times CN=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{29}$ وعليه $V=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{29}\times\sqrt{29}=29uv$.

التمرين الثاني:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+2=0$

$\Delta=4-8=-4=(2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ و $z_2=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$

2- لتكن النقط K ، L ، M لواحقها $z_K=1+i$ ، $z_L=1-i$ ، $z_M=-i\sqrt{3}$

- تعليم النقط .

3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ،

تعيين z_N لاحقة N .

$\overrightarrow{LN}=-\overrightarrow{LM}$ معناه $z_N-z_L=-(z_M-z_L)$ ومنه $z_N=-(z_M-z_L)+z_L$

أي $z_N=-\left(-i\sqrt{3}-1+i\right)+1-i$ بالتالي $z_N=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

- تعيين z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

الكتابة المركبة للدوران r هي : $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z'=iz$.

$r(M)=A$ معناه $z_A=iz_M=i\left(-i\sqrt{3}\right)$ ومنه $z_A=\sqrt{3}$.

$r(N)=C$ معناه $z_C=iz_N=i\left(2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)$ ومنه $z_C=2-\sqrt{3}+2i$.

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .

$z'=iz_L=i(1-i)$ ومنه $z'=1+i=z_K$ وعليه $r(L)=K$.

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .

- تعيين z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.

العبارة المركبة للانسحاب t هي : $z'=z+z_{\vec{u}}$ أي $z'=z+2i$

$t(M)=D$ معناه $z_D=z_M+2i$ ومنه $z_D=-i\sqrt{3}+2i=i\left(2-\sqrt{3}\right)$.

$t(N)=B$ معناه $z_B=z_N+2i$ ومنه $z_B=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)+2i$ أي $z_B=2+i\sqrt{3}$.

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .

$z'=z_L+2i=1-i+2i$ ومنه $z'=1+i=z_K$ وعليه $t(L)=K$.

5- أ) تبيين أنّ: $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$.

$z_A-z_B=\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}$

$i\left(z_C-z_B\right)=i\left(2-\sqrt{3}+2i-2-i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}$

ومنه $z_A-z_B=i\left(z_C-z_B\right)$ أي $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$ ومنه $\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

وهذا يعني أنّ $BA=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B .

ب) طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا L منتصف $[MN]$ ولدينا $\begin{cases} r(M)=A \\ r(N)=C \\ r(L)=K \end{cases}$ وبما أنّ الدوران يحافظ على المنتصف فإنّ K منتصف $[AC]$

ولدينا $\begin{cases} t(M)=D \\ t(N)=B \\ t(L)=K \end{cases}$ وبما أنّ الانسحاب يحافظ على المنتصف فإنّ K منتصف $[BD]$.

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (قطراه متناصفان)

وزيادة على ذلك لدينا $BA=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن $ABCD$ مربع.

التمرين الثالث:

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ(C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

(C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ معناه $g(\ln 2)=\ln 2$ يكافئ $(\ln 2)a+b-\frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2}=\ln 2$ ويكافئ $(\ln 2)a+b-2=\ln 2$ أي $(\ln 2)a+b=\ln 2+2...(1)$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=a-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$

(C_g) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(\ln 2)=0$ ويكافئ $a-1=0$ أي $a=1$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(\ln 2).(1)+b=\ln 2+2$ ومنه $b=2$ وعليه $(a;b)=(1;2)$

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\frac{8}{e^x+2}$

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+4-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{4e^x+8-4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{8}{e^x+2}$$

2.حساب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty} x+2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2+\frac{8}{e^x+2}=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} x+2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$

3. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{e^{2x}+4e^x+4-8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{e^{2x}-4e^x+4}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}$$

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$ **.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{4e^x}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2=2$.

ـ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$.

5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

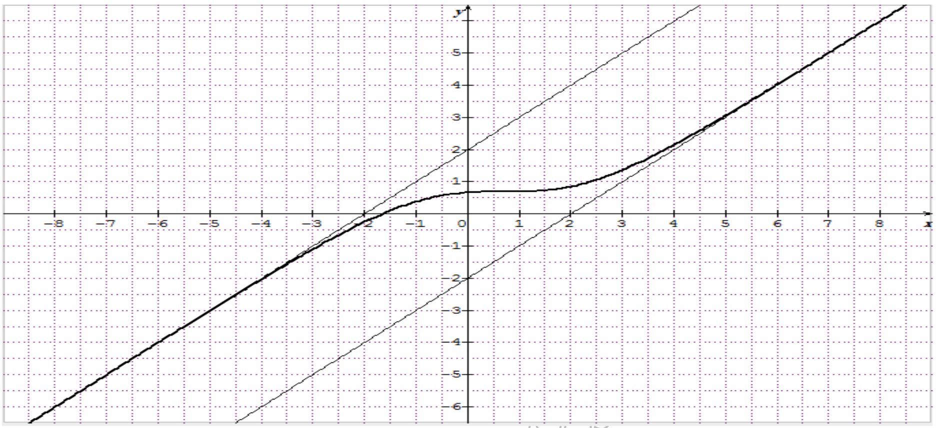
بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولاتغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6. تبيين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7;-1,6]$ ولدينا $f(-1.6)=0.03$، $f(-1.7)=-0.03$ أي $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,7;-1,6[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

7. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

aziz_mus1@hotmail.fr



III - نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

ـ تعيين اتجاه تغيّر الدّالة h .

نضع $u(x)=x^2$ عندئذ $h(x)=\left[f(x)\right]^2=u\left[f(x)\right]=(u\circ f)(x)$

لدينا $u'(x)=2x$ ومنه $h'(x)=f'(x)\times u'(f(x))=f'(x)\times 2f(x)=2f'(x)\times f(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f'(x)\geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

الدالة h متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\alpha\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[\alpha;+\infty\right[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغيّر مركب دالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\alpha\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;0\right]$ والدالة u متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;0\right]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\alpha\right]$.

و لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\alpha;+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[0;+\infty\right[$ والدالة u متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left[\alpha;+\infty\right[$.

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

بما أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

جدول تغيرات الدّالة h .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(\alpha)=\left[f(\alpha)\right]^2=0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الرابع:

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **دراسة تغيّرات الدالة** f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln -x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim_{x\xrightarrow{<}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim_{x\xrightarrow{<}0} \frac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} 1-\frac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} 1-\frac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x^2-2=0$ ويكافئ $\ln x^2=2$ ويكافئ $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ معناه $\ln x^2-2>0$ ويكافئ $\ln x^2>2$ ويكافئ $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

الدّالة f متزايدة على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e+2}{e}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{e-2}{e}$	$\nearrow$	1

2. **إثبات أنّ المنحنى** (C_f) **يقطع المستقيم** $(\Delta): y=1$ **في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.**

$f(x)=1$ معناه $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ يكافئ $\ln x^2=0$ ويكافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذن $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. **حساب** $f(-x)+f(x)$.

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم؛ $f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$

aziz_mus1@hotmail.fr

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x)+f(x)=2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. **تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال** $]-0,71;-0,70[$

الدّالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدينا $f(-0,71)\approx 0,04$ ،$f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,71;-0,70[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

5. **إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين.**

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

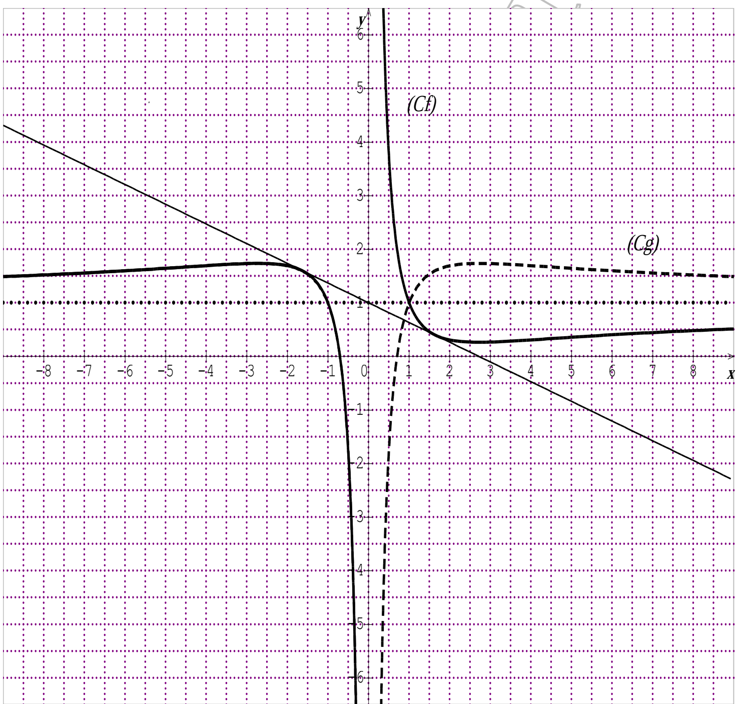
$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

وتكافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلة المماس (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.



6. **رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).**

7. **المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$**

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبيين أنّ h دالة زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\dfrac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

$\begin{cases} h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{x};x>0 \\ h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{-x};x<0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} h(x)=f(-x);x>0 \\ h(x)=f(x);x<0 \end{cases}$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أنّ h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.